7 класс

Задача №7-Т1. Робот-пылесос

Комнаты в квартирах обычно имеют площадь, не превышающую нескольких десятков квадратных метров. Поэтому, можно предположить, что площадь измерялась в см^2 .

Вряд ли пылесос сможет убрать такую площадь за 30 секунд, это очень маленькое время, а 30 часов, напротив, время очень большое. Вряд ли мы бы стали пользоваться таким медленным пылесосом. Поэтому время измеряется в минутах.

Ширина пылесоса должна иметь значение порядка нескольких десятков сантиметров.

Величины, задействованные в задаче связаны между собой формулой:

$$v = \frac{3S}{d \cdot t},$$

где S – площадь комнаты, d – ширина пылесоса, а t – время уборки.

Попробуем подставить в формулу наши значения для площади и времени, а в качестве ширины возьмём величину, близкую по порядку $(20 - 40$ см), например, 20 см. И определим, в каких единицах измерения скорость будет иметь порядок сотен:

$$v = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{20 \text{ см} \cdot 30 \text{ мин}} = 1250 \ \frac{\text{см}}{\text{мин}} = \frac{1250 \cdot 0{,}01 \text{ м}}{\frac{1}{60} \text{ ч}} = 750 \ \frac{\text{м}}{\text{ч}} = 75000 \ \frac{\text{см}}{\text{ч}} = 12500 \ \frac{\text{мм}}{\text{мин}}.$$

Таким образом, очень вероятно, что скорость посчитана в см/ч. Проверим это предположение, посчитав ширину пылесоса:

$$d = \frac{3S}{vt} = \frac{3 \cdot 250000 \text{ см}^2}{50000 \ \frac{\text{см}}{\text{ч}} \cdot 30 \text{ мин}} = \frac{3 \cdot 25 \text{ м}^2}{500 \ \frac{\text{м}}{\text{ч}} \cdot 0{,}5 \text{ ч}} = 0{,}3 \text{ м} = 30 \text{ см}.$$

Полученное значение ширины совпадает с ожиданиями; значит, наши предположения были верны.

Можно было также проверить теорию, что скорость посчитана в мм/мин. Однако в этом случае диаметр получился бы в 6 раз меньше – 5 см, что, очевидно, слишком мало.

Задача №7-Т2. Час пик

Обозначим длину одной ступеньки эскалатора l_0, скорость эскалатора u, собственную скорость идущих людей v, а число ступенек эскалатора N_0. Время движения человека, стоящего на эскалаторе $t_{\text{стоя}} = \frac{N_0 l_0}{u}$. Время движения человека, идущего по эскалатору $t_{\text{ид}} = \frac{N_0 l_0}{u+v}$. В системе отсчёта эскалатора (или стоящего на эскалаторе человека) относительно стоящего человека проходит колонна людей со скоростью v. Длина этой колонны $vt_{\text{стоя}} = \frac{v}{u} N_0 l_0$, а значит людей в этой колонне

$$N_1 = \frac{v}{u} N_0 \tag{1}$$

В системе отсчёта человека, идущего по эскалатору, справа от него во встречном к нему направлении идет колонна людей со скоростью v. Длина этой колонны $vt_{\text{ид}} = \frac{v}{v+u} N_0 l_0$, а значит людей в этой колонне

$$N_2 = \frac{v}{v+u} N_0 \tag{2}$$

Из свойств дробей получаем, что $N_2 < N_1$, то есть N_1 больше. На этот вопрос можно было ответить и из качественных соображений: каждый раз, когда люди слева делают шаг, они встречают нового соседа справа, а люди справа встречают соседа слева. То есть частота встречи нового соседа у левых и правых людей одинакова. Но те, кто находятся на эскалаторе дольше, встречают больше людей.

Из (1) и (2) уравнений следует, что $N_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2}$. Людей на эскалаторе в два раза больше, чем ступенек

$$N = 2N_0 = \frac{2N_1 N_2}{N_1 - N_2}$$

Задача №7-Т3. Рекорды скорости

Темп бега – величина обратная к скорости $T = \frac{1}{v}$. Поэтому чем меньше темп бега, тем больше скорость.

Минимальный темп бега 3 мин/км, что соответствует скорости 20 км/час. Максимальный темп бега 6 мин/км, что соответствует скорости 10 км/час.

При движении с постоянной скоростью v время движения на участке s можно вычислить как $t = \frac{s}{v} = sT$. Поэтому время движения на каком-то участке пропорционально площади под графиком зависимости темпа бега от расстояния на этом участке. Минимальному времени, за которое спортсмен пробежал один километр, соответствует участок графика, площадь под которым минимальна. При подсчете площади под графиком необходимо учитывать, что на графике, приведенном в условии, смещено начало координат. Из графика видно, что минимальное время одного километра было на участке с третьего по четвертый километры. Так как площадь одной клетки графика пропорциональна одной минуте, минимальное время, затраченное на прохождение одного километра, равно 3,5 мин.

Минимальное время одного километра на участке с третьего по четвертый километры и равно 3,5 минуты.

Минимальное время на участке длиной 5 км с первого по шестой километры и равно 21,5 минуты.

Задача №7-Т4. Консервированные снежки

Между снежками, насыпанными в кадушку, существуют пустоты. Так как $m_2 = 6$ кг плотно утрамбованного снега занимают всю кадушку, то $m_1 = 4$ кг снега такой же плотности в снежках имеют объём, равный $\frac{2V}{3}$, то есть 8 литров. Следовательно, на пустоты между снежками приходится объём $\frac{V}{3} = 4$ литра. Засыплем эти пустоты солью. Так как соль состоит из крупинок, то после засыпания солью пустот между снежками, останутся пустоты между крупинками соли, но объём пустот станет меньше. Для нахождения объёма пустот между крупинками соли нам нужна насыпная плотность соли. Определим её, зная, что килограммовая пачка соли имеет объём

$$V_{\text{пачки}} = 18 \cdot 10 \cdot 6 \text{ см}^3 = 1080 \text{ см}^3.$$

Тогда насыпная плотность соли равна

$$\rho_{\text{нас}} = \frac{1000}{1080} \approx 0{,}93 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 930 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Определим массу соли, насыпанной в кадушку

$$m_{\text{с}} = \rho_{\text{нас}} \cdot \frac{V}{3};$$

$$m_{\text{с}} = 930 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3{,}7 \text{ кг}$$

Определим объём самой соли:

$$V_{\text{с}} = \frac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}};$$

$$V_{\text{с}} = \frac{3{,}7}{2150} = 1{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1{,}7 \text{ л}.$$

Теперь найдем объёмы пустот между крупинками соли. Объём пустот между снежками был равен 4 литра, соль имеет чистый объём 1,7 литра, поэтому объём пустот между крупинками равен:

$$V_{\text{пустот}} = 4 - 1{,}7 = 2{,}3 \text{ л}.$$

По условию задачи Баба Яга полностью заполняет кадушку водой, поэтому объём воды совпадает с объёмом пустот $V_{\text{пустот}}$. Остаётся определить объём солёной воды и её массу. Объём солёной воды складывается из объёма воды, полученной после таяния снега (растаяло 4 кг снега, получилось 4 кг воды, имеющих объём 4 л), объёма соли 1,7 л и объёма налитой воды 2,3 л. Поэтому получаем:

$$V_{\text{в}} = 4 + 1{,}7 + 2{,}3 = 8 \text{ л}.$$

Масса солёной воды M складывается из 4 кг воды, полученной после таяния снега, массы соли (3,7 кг) и массы налитой воды (2,3 кг)

$$M = 4 + 3{,}7 + 2{,}3 = 10 \text{ кг}.$$

Плотность солёной воды равна:

$$\rho_\text{к} = \frac{M}{V_\text{в}};$$

$$\rho_\text{к} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \ \frac{\text{г}}{\text{л}} = 1250 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$